

# ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С «ПРОГУЛКАМИ» ПРИБОРА, УПРАВЛЯЕМОЙ $T$ -СТРАТЕГИЕЙ

А. А. Назаров, С. В. Пауль

---

Томский государственный университет

Томск, Россия

E-mail: [nazarov.tsu@gmail.com](mailto:nazarov.tsu@gmail.com), [paulsv82@mail.ru](mailto:paulsv82@mail.ru)

Исследуется система массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком и одним обслуживающим прибором с прерыванием обслуживания («прогулками»). Предлагается аналитический метод нахождения объема работы по обслуживанию всех заявок, находящихся в системе.

*Ключевые слова:* система массового обслуживания, система с «прогулками», циклическая система, метод асимптотического анализа.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Современные инфотелекоммуникационные системы, математическими моделями которых могут являться однолинейные системы массового обслуживания с «прогулками» обслуживающего прибора, достаточно часто встречаются на практике [1]. В реальности под «прогулкой» понимается временное прекращение обслуживания для выполнения либо других работ прибором, либо его поломкой, либо его ремонтом [2]. Анализ подобных систем представляет значительный интерес еще и потому, что их характеристики позволяют исследовать циклические системы [3], [4].

Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором и очередью с неограниченным числом мест для ожидания. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Система функционирует в циклическом режиме, цикл которой состоит из двух последовательных интервалов. В течение первого интервала заявки потока обслуживаются на приборе. Если заявок в очереди нет к моменту начала этого интервала или прибор обслужил все заявки, которые на этом интервале находились в очереди, то прибор все равно остается в этом режиме, ожидая прихода заявок. От момента окончания этого интервала прибор уходит на «прогулку», в течение второго интервала указанного цикла. Во время прогулки пришедшие в систему заявки накапливаются в очереди и ждут, когда прибор вернется на обслуживание.

Пусть продолжительность этих интервалов случайные и определяются функциями распределения  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  соответственно. В течение первого интервала прибор обслуживает заявки случайное время с функцией распределения  $B(x)$ . Будем рассматривать системы с дообслуживанием заявок.

Обозначим

$V(t)$  – объем работы по обслуживанию всех заявок, находящихся в системе в момент времени  $t$ ;

$k(t)$  – состояние прибора: 1 – прибор на первом интервале, 2 – прибор на «прогулке»;

$z(t)$  – остаточное время пребывания прибора в соответствующем состоянии.

Рассмотрим трехмерный марковский процесс  $\{V(t), k(t), z(t)\}$  и для распределения вероятностей

$$P_k(v, z, t) = P\{V(t) < v, k(t) = k, z(t) < z\}$$

составим прямую систему уравнений Колмогорова. Будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1(v, z)}{\partial v} + \frac{\partial P_1(v, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(v, 0)}{\partial z} - \lambda P_1(v, z) + \lambda \int_0^v B(v-x) dP_1(x, z) + \frac{\partial P_2(v, 0)}{\partial z} T_1(z) = 0, \\ \frac{\partial P_2(v, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(v, 0)}{\partial z} - \lambda P_2(v, z) + \lambda \int_0^v B(v-x) dP_2(x, z) + \frac{\partial P_1(v, 0)}{\partial z} T_2(z) = 0. \end{cases}$$

Введем частичные характеристические функции  $H_k(u, z) = \int_0^\infty e^{juv} dP_k(v, z)$ , для которых систему уравнений Колмогорова перепишем в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} - [\lambda(1 - \beta(u)) + ju] H_1(u, z) + ju P_1(0, z) + \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} T_1(z) = 0, \\ \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} - \lambda(1 - \beta(u)) H_2(u, z) + \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} T_2(z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь обозначили

$$\beta(u) = \int_0^\infty e^{juv} dB(v).$$

$P_1(0, z)$  – вероятность того, что прибор в режиме обслуживания, но в системе нет заявок.

## МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Систему (1) будем решать методом асимптотического анализа в условиях большой загрузки системы. Обозначим

$$\lambda = (1 - \varepsilon)S, \quad u = \varepsilon w, \quad H_k(u, z) = F_k(w, z, \varepsilon), \quad P_1(0, z) = \varepsilon \pi_1(z, \varepsilon). \quad (2)$$

Здесь  $S$  имеет смысл загрузки системы. Ее значение будет найдено ниже. Тогда систему (1) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} - \\ - ((1 - \varepsilon)S(1 - \beta(\varepsilon w)) + j\varepsilon w) F_1(w, z, \varepsilon) + j\varepsilon^2 w \pi_1(z, \varepsilon) + \frac{\partial F_2(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} T_1(z) = 0, \\ \frac{\partial F_2(w, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_2(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} - (1 - \varepsilon)S(1 - \beta(\varepsilon w)) F_2(w, z, \varepsilon) + \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} T_2(z) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и учитывая  $\beta(0) = \int_0^\infty dB(v) = 1$ , получим

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0)}{\partial z} - \frac{\partial F_2(w, 0)}{\partial z} T_1(z) = 0, \\ \frac{\partial F_2(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial F_2(w, 0)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(w, 0)}{\partial z} T_2(z) = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы будем искать в виде

$$F_k(w, z) = R_k(z) \Phi(w).$$

Тогда приходим к следующей системе

$$\begin{cases} R_1'(z) - R_1'(0) - R_2'(0)T_1(z) = 0, \\ R_2'(z) - R_2'(0) - R_1'(0)T_2(z) = 0, \end{cases}$$

для которой запишем решение в виде

$$\begin{cases} R_1(z) = \int_0^z (R_1'(0) - R_2'(0)T_1(x))dx, \\ R_2(z) = \int_0^z (R_2'(0) - R_1'(0)T_2(x))dx. \end{cases}$$

Здесь  $\{R_1(z), R_2(z)\}$  – двумерное распределение состояния прибора и величины остаточного времени пребывания прибора в нем. Устремим  $z \rightarrow \infty$ . Учитывая, что  $T(\infty) = 1$ , получим:

$$\begin{cases} R_1(\infty) = \int_0^\infty (R_1'(0) - R_2'(0)T_1(x))dx, \\ R_2(\infty) = \int_0^\infty (R_2'(0) - R_1'(0)T_2(x))dx. \end{cases}$$

Для сходимости несобственного интеграла необходимо выполнения следующего условия

$$R_1'(0) - R_2'(0)T_1(\infty) = 0,$$

откуда получаем равенство

$$R_1'(0) = R_2'(0).$$

Обозначим

$$R_1'(0) = R_2'(0) = R'(0).$$

Имеем

$$R_k(z) = R'(0) \int_0^z (1 - T_k(x))dx.$$

Учитывая, что  $\int_0^\infty (1 - T_k(x))dx = T_k$  – среднее время пребывания прибора в соответствующем состоянии, тогда с одной стороны

$$R_1(\infty) + R_2(\infty) = 1,$$

с другой

$$R_1(\infty) + R_2(\infty) = R'(0) \int_0^\infty (1 - T_1(x))dx + \int_0^\infty (1 - T_2(x))dx = R'(0)(T_1 + T_2).$$

Получим

$$R'(0) = \frac{1}{(T_1 + T_2)}.$$

Тогда

$$\begin{cases} R_1(\infty) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_0^\infty (1 - T_1(x))dx = \frac{T_1}{T_1 + T_2}, \\ R_2(\infty) = \int_0^\infty (R_2'(0) - R_1'(0)T_2(x))dx = \frac{T_2}{T_1 + T_2}. \end{cases}$$

В систему (3) подставим следующее разложение

$$F_k(w, z, \varepsilon) = \Phi(w) \{R_k(z) + j\varepsilon w f_k(z)\} + O(\varepsilon^2).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1(z)}{\partial z} + j\varepsilon w \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} - \frac{\partial R(0)}{\partial z} - j\varepsilon w \frac{\partial f_1(0)}{\partial z} - [(1-\varepsilon)S\{1-\beta(\varepsilon w)\} + j\varepsilon w] \{R_1(z) + j\varepsilon w f_1(z)\} + \\ + \frac{\partial R(0)}{\partial z} T_1(z) + j\varepsilon w \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} T_1(z) + O(\varepsilon^2) = 0, \\ \frac{\partial R_2(z)}{\partial z} + j\varepsilon w \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} - \frac{\partial R(0)}{\partial z} - j\varepsilon w \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} - (1-\varepsilon)S(1-\beta(\varepsilon w)) \{R_2(z) + j\varepsilon w f_2(z)\} + \\ + \frac{\partial R(0)}{\partial z} T_2(z) + j\varepsilon w \frac{\partial f_1(0)}{\partial z} T_2(z) + O(\varepsilon^2) = 0. \end{cases}$$

В функции  $\beta(\varepsilon w)$  разложим экспоненту в ряд

$$\beta(\varepsilon w) = \int_0^\infty e^{j\varepsilon w x} dB(x) = \int_0^\infty (1 + j\varepsilon w x) dB(x) = 1 + j\varepsilon w b + O(\varepsilon^2),$$

здесь  $b$  – начальный момент первого порядка.

$$\begin{cases} R'_1(z) - R'(0)(1 - T_1(z)) + j\varepsilon w (f'_1(z) - f'_1(0) + f'_2(0)T_1(z)) - \\ - (-j\varepsilon w Sb + j\varepsilon w) \{R_1(z) + j\varepsilon w f_1(z)\} + O(\varepsilon^2) = 0, \\ R'_2(z) - R'(0)(1 - T_2(z)) + j\varepsilon w (f'_2(z) - f'_2(0) + f'_1(0)T_2(z)) + \\ + Sj\varepsilon w b \{R_2(z) + j\varepsilon w f_2(z)\} + O(\varepsilon^2) = 0. \end{cases}$$

В силу не сложных преобразований, имеем

$$\begin{cases} j\varepsilon w (f'_1(z) - f'_1(0) + f'_2(0)T_1(z)) + jw\varepsilon Sb R_1(z) - jw\varepsilon R_1(z) + O(\varepsilon^2) = 0, \\ j\varepsilon w (f'_2(z) - f'_2(0) + f'_1(0)T_2(z)) + Sj\varepsilon w b R_2(z) + O(\varepsilon^2) = 0. \end{cases}$$

Разделим оба уравнения системы на  $\varepsilon$  и устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} f'_1(z) - f'_1(0) + f'_2(0)T_1(z) + Sb R_1(z) - R_1(z) = 0, \\ f'_2(z) - f'_2(0) + f'_1(0)T_2(z) + Sb R_2(z) = 0. \end{cases}$$

Запишем

$$\begin{cases} f_1(z) = \int_0^z \{f'_1(0) - f'_2(0)T_1(x) + R_1(x)(1 - Sb)\} dx, \\ f_2(z) = \int_0^z \{f'_2(0) - f'_1(0)T_2(x) - Sb R_2(x)\} dx. \end{cases}$$

Найдем  $f_1(\infty), f_2(\infty)$ :

$$\begin{cases} f_1(\infty) = \int_0^\infty \{f'_1(0) - f'_2(0)T_1(x) + R_1(x)(1 - Sb)\} dx, \\ f_2(\infty) = \int_0^\infty \{f'_2(0) - f'_1(0)T_2(x) - Sb R_2(x)\} dx. \end{cases}$$

Необходимо, чтобы

$$\begin{cases} f'_1(0) - f'_2(0)T_1(\infty) + R_1(\infty)(1 - Sb) = 0, \\ f'_2(0) - f'_1(0)T_2(\infty) - Sb R_2(\infty) = 0. \end{cases}$$

Обозначим  $R_1 = R_1(\infty)$ ,  $R_2 = R_2(\infty)$ , тогда

$$R_1 = Sb, \quad R_2 = 1 - Sb.$$

С другой стороны загрузка системы равна

$$S = \frac{R_1}{b} = \frac{T_1}{(T_1 + T_2)b}.$$

Получим дополнительное равенство

$$f_1'(0) - f_2'(0) = Sb(Sb - 1) = R_1(R_1 - 1). \quad (4)$$

Имеем

$$\begin{cases} f_1(\infty) = f_2'(0) \int_0^\infty (1 - T_1(x)) dx - R_2 \int_0^\infty (R_1 - R_1(x)) dx, \\ f_2(\infty) = f_1'(0) \int_0^\infty (1 - T_2(x)) dx + R_1 \int_0^\infty (R_2 - R_2(x)) dx. \end{cases}$$

Обозначим  $\Delta_k = \int_0^\infty (R_k - R_k(x)) dx$ ,

$$\begin{cases} f_1(\infty) = f_2'(0)T_1 - R_2\Delta_1, \\ f_2(\infty) = f_1'(0)T_2 + R_1\Delta_2. \end{cases} \quad (5)$$

Устремим  $z \rightarrow \infty$ , просуммируем уравнения системы (3):

$$-[(1 - \varepsilon)S(1 - \beta(\varepsilon w)) + j\varepsilon w]F_1(w, \varepsilon) - (1 - \varepsilon)S(1 - \beta(\varepsilon w))F_2(w, \varepsilon) + j\varepsilon^2 w \pi_1(\varepsilon) = 0.$$

Подставим разложения

$$F_k(w, z, \varepsilon) = \Phi(w)\{R_k(z) + j\varepsilon w f_k(z)\} + o(\varepsilon^2),$$

$$\beta(\varepsilon w) = \int_0^\infty e^{j\varepsilon w x} dB(x) = \int_0^\infty \left(1 + j\varepsilon w x + \frac{(j\varepsilon w x)^2}{2}\right) dB(x) = 1 + j\varepsilon w b + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} b_2 + o(\varepsilon^2),$$

где  $b_2$  – второй начальный момент времени пребывания в соответствующем состоянии прибора, в полученное равенство

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} Sb_2 - j\varepsilon^2 w Sb + (j\varepsilon w)^2 Sbf_1(\infty) - (j\varepsilon w)^2 f_1(\infty) + (j\varepsilon w)^2 Sbf_2(\infty) \right] \Phi(w) + \\ & + j\varepsilon^2 w \pi_1(\varepsilon) = o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Разделим обе части уравнения на  $\varepsilon^2$  и устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ , положим  $w = 0$ , и, учитывая, что  $\Phi(0) = 1$ , получим:

$$\pi_1 = Sb, \text{ где } \pi_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi_1(\varepsilon).$$

Тогда

$$\Phi(w) = \frac{Sb}{Sb - jw \left\{ \frac{1}{2} Sb_2 + (Sb - 1)f_1(\infty) + Sbf_2(\infty) \right\}}.$$

Рассмотрим отдельно выражение в знаменателе

$$(Sb - 1)f_1(\infty) + Sbf_2(\infty),$$

Учитывая (4), (5), получим и обозначим

$$-R_1 R_2 \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} + R_1^2 R_2 \frac{T_2^{(2)}}{2T_2} + R_2^2 R_1 \frac{T_1^{(2)}}{2T_1} = \Delta. \quad (6)$$

Здесь  $T_k^{(2)}$  – второй начальный момент времени пребывания прибора в состоянии  $k$ . Тогда

$$\Phi(w) = \frac{Sb}{Sb - jw \left\{ \frac{1}{2} Sb_2 + \Delta \right\}},$$

где  $\Delta$  определено равенством (6). То есть функция  $\Phi(w)$  является характеристической функцией экспоненциально распределенной случайной величины. Обозначим

$$\gamma = Sb \left( \frac{Sb_2}{2} + \Delta \right)^{-1}.$$

Сделаем обратные замены, устремим  $z \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим характеристическую функцию объема работы по обслуживанию всех заявок

$$H(u) = \sum_k F(w, \varepsilon) = \sum_k \Phi(w) R_k(\infty) + o(\varepsilon) = \frac{\gamma}{\gamma - ju}.$$

Система с прогулками лежит в основе метода исследования циклической системы и позволяет найти распределение вероятностей значений времени ожидания заявок в системе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Печинкин, А. В. Система массового обслуживания с ненадежным прибором в дискретном времени / А. В. Печинкин, И. А. Соколов // Информ. и ее примен. 2011. Т. 5. В. 4. С. 6–17.
2. Саксонов, Е. А. Метод вычисления вероятностей состояний для однолинейной системы массового обслуживания с “прогулками” обслуживающего прибора // Автомат. и телемех. 1995. В. 1, С. 101–106.
3. Вишневский, В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях / В. Вишневский, О. Семенова. М. : Техносфера, 2007. 312 с.
4. Вишневский, В. М. Математические методы исследования систем поллинга / В. М. Вишневский, О. В. Семенова // Автомат. и телемех. 2006. В. 2, С. 3–56.